

Leioa, ZTF, EHU, 2005, Urriak 5

# Matematika: Oinarrizko zientzia eta etorkizunerako bidea

## Matemáticas: Ciencia básica y camino hacia el futuro

Enrique Zuazua  
Universidad Autónoma  
28049 Madrid, Spain  
enrique.zuazua@uam.es

<http://www.uam.es/enrique.zuazua>

El origen de las matematicas: el numero 5

La utilidad de las matematicas

El rigor de las matematicas

La riqueza de las matematicas: desde la logica hasta las aplicaciones...

teoria de juegos/Nash/prisionero; geometria; optimizacion; finanzas, simulacion numerica, fluidos,...

El futuro? Video...

MATEMATIKAK ZERTARAKO BALIO DU?

¿ TIENEN LAS MATEMÁTICAS ALGUNA UTILIDAD?

¿ SON ALGO MÁS QUE UNA CIENCIA BÁSICA?

¿ JUEGAN Y JUGARÁN ALGÚN PAPEL EN EL DESARROLLO TECNOLÓGICO?

¿ SON UN MERO DIVERTIMIENTO PARA VIRTUOSOS?

¿ SON ALGO MÁS QUE UNA HERRAMIENTA DE FILTRADO A LO LARGO DEL CICLO EDUCATIVO ?

EGIA ESAN, GALDERA HAUEK ZIENTZIA ETA TEKNIKAREN ARLO GUZTIETAN BALIOZKOAK DIRA.

EN REALIDAD ESTAS PREGUNTAS SON PERTINENTES EN CUALQUIER ÁMBITO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

PERO ESTAMOS ACOSTUMBRADOS A QUE LA RESPUESTA SEA MÁS SENCILLA EN OTRAS DISCIPLINAS COMO LA BIOLOGÍA, LA QUÍMICA,...

ZIENTZIAREN BESTE ARLOETAN ERANTZUNA ERRAZAGOA IZATEN DA BERAIEIEN APLIKAZIOAK NABARIAGOAK IZATEN BAITIRA.

## Cuando lo importante empieza a ser urgente

La misión de las científicas y científicos es comprender la realidad y en la medida de lo posible ayudar a transformarla en beneficio de su especie. Este principio que parece simple se transforma en un conjunto de procesos de gran complejidad en las sociedades desarrolladas. Comprender la realidad exige investigarla y ello supone diseñar un plan para hacerlo, obtener los recursos, desarrollar el plan y si todo va bien producir resultados reproducibles por otros grupos de investigación.

Iturria — El País Digital

Irailak 21, 2004

Errealitatea ulertu eta berau landu gizakiaren bizitza-baldintzak hobatzeko.

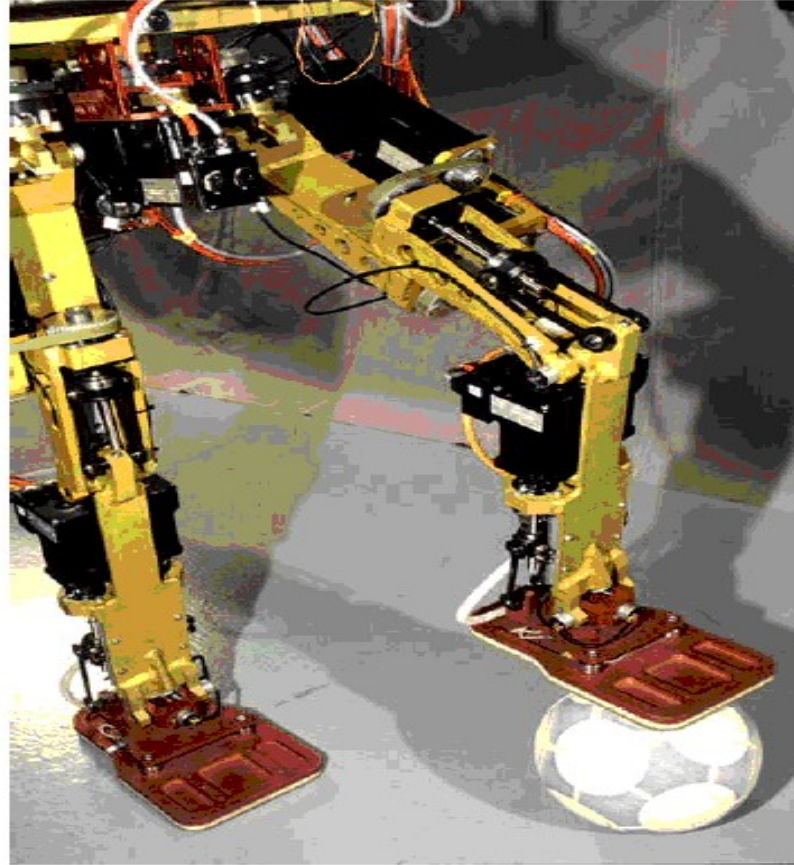
## Lanzamiento de la iniciativa 'Automóvil Inteligente' de la Comisión Europea

El pasado 14 de septiembre tuvo lugar el lanzamiento de la iniciativa "[Automóvil Inteligente](#)" por parte de Viviane Reding, Comisaria europea de Sociedad de la Información y Medios de Comunicación. Este proyecto forma parte de la iniciativa i2010, encaminada a traducir la aplicación de las tecnologías de la información y de las comunicaciones en crecimiento económico y creación de empleo.

El objetivo de la iniciativa "Automóvil Inteligente" es fomentar la adopción y el uso de las **tecnologías de la información y las comunicaciones en el sector de transportes con el fin de reducir los atascos, la contaminación, el consumo de energía y los accidentes.** Para ello se pretenden llevar a cabo diferentes actividades con el fin de concienciar a los usuarios sobre los resultados de investigación, compartir mejores prácticas y facilitar la comercialización de los resultados de investigación.

Iturria: Oficina de la Comunidad de Madrid en Bruselas - mi+d

Irailak 21, 2005



Erraza ote da?



Benetan posiblea da Geometria erabili gabe? Eta Algebra? Eta Anal-  
isia? Eta Analisi Numerikoa?

¿Es fácil construir un robot que realice, al menos de manera muy simplificada algunas de las funciones que realiza el ser humano de manera espontánea y natural?



Denok “ikusten dugu” atal baten atzetik, atzekoaren ikusten ez deneko atala.

Todos somos capaces de “ver” del módulo cubierto por el delantero, la parte que no se ve.

Erraza izango ote da robot bati hori egiten irakastea? Posible izango da Geometria erabili gabe?

¿Será fácil “enseñar” a un robot a realizar esa interpretación? ¿Podremos hacerlo sin usar la Geometría?

Unibertsoa Matematikaren hizkuntzan idatzita dago.

La filosofía está escrita en ese grandísimo libro abierto ante los ojos; quiero decir, **el Universo**, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres en los que está escrito. **Está escrito en lengua matemática** y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un oscuro laberinto.



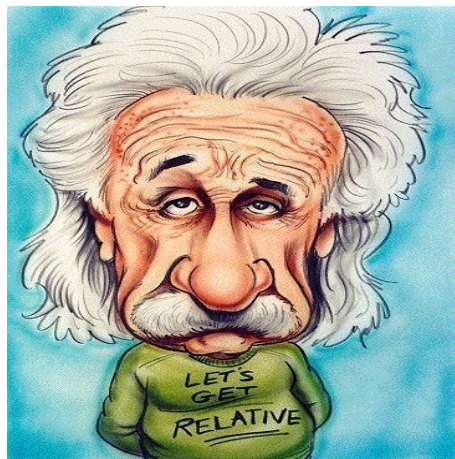
galileo.jpg

**Galileo Galilei** (1564-1642), Pisa-n jaioa, Isaac Newton jaio zen urtean hil zen. Newton-i beraren ideiak jarraituz gaur egungo zientziaren oinarriak jarri zituen.

Zientzi esperimentalen metodoaren sortzailea, astronomia,...

Nola daiteke ba, Matematika, esperientziatik at, gizakiaren pentsamenduaren produktu hutsa izanik, errealitatea horren ondo deskribatzeko baliagarria izatea?

¿cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad?



Albert Einstein (1879-1955)

There is no branch of mathematics, however abstract, which may not some day be applied to phenomena of the real world.

No hay rama de las Matemáticas que, por abstracta que sea, algún día no sea aplicable a fenómenos del mundo real.

Matematikaren atal guztiak, oso abstraktuak izan arren, noizbait aplikatuko dira mundu errealeko arazoetan.

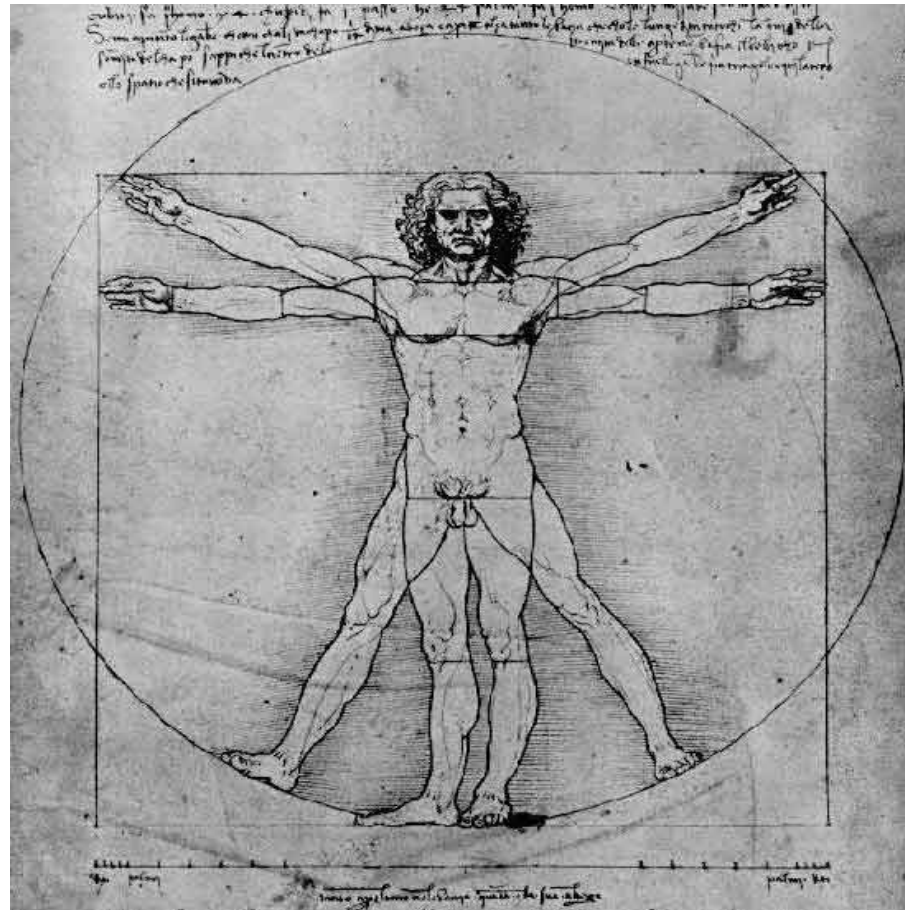
Nikolay Lobachevsky (1792 - 1856)

<http://www.gap-system.org/history/Quotations2/1201.html>

No hay certidumbre allí donde no es posible aplicar ninguna de las ciencias matemáticas ni ninguna de las basadas en las matemáticas.

Leonardo Da Vinci, Vinci (1452) - Cloux (1519)





<http://webs.adam.es/rllorens/picquad/leonardo.htm>

MATEMATIKA =

Algebra

Analisisa

Geometria

Topologia

Analisi Numerikoa

Estatistika

Ikerkuntza Operazionala

Probabilitatea

Logika

Zenbakien teoria

Ekuazio Diferentzialak ... ..

....

ANALISIA=

Fourieren Analisia

Analisi Konplexua

Analisi Erreal

Analisi Funtzionala

Analisi ez-lineala

....

Sailkapen osoa (Clasificación completa): American Mathematical Society (AMS), <http://www.ams.org/msc/>

ZERTARAKO?

¿PARA QUE?

BENETAN BEHARREZKOA DA?

¿ES VERDADERAMENTE NECESARIO?

Galileo, da Vinci eta Einstein-entzat bai. Eta guretzat?

Para Galileo, da Vinci y Einstein sí. ¿ Y para nosotros?

BEGIRA DEZAGUN BERAZ MATEMATIKAREN ATAL BATZUTAN, ARAZO HAU URBILETIK AZTERTZEKO .....

CONTEMPLAMOS ALGUNAS PARCELAS DE LAS MATEMÁTICAS PARA ANALIZAR ESTA CUESTIÓN UN POCO MÁS DE CERCA.

## The Abel Prize 2005 to Peter D. Lax

The Norwegian Academy of Science and Letters has decided to award the Abel Prize for 2005 to [Peter D. Lax, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University](#). Lax receives the Abel Prize for his groundbreaking contributions to the theory and application of partial differential equations and to the computation of their solutions.

Deribatu partzialetango ekuazioen teoria eta aplikazioetan, eta bereain ebazpenak konputatzen sortutakoagatik.

<http://www.abelprisen.no/en/>

# EKUAZIO DIFERENTZIALAK

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t > 0.$$

$x = x(t)$ ,  $t =$  denboraren funtzioa.

$x'(t) = dx(t)/dt$ ,  $x$  aldagairen **deribatua**, berau aldatzen deneko abiadura

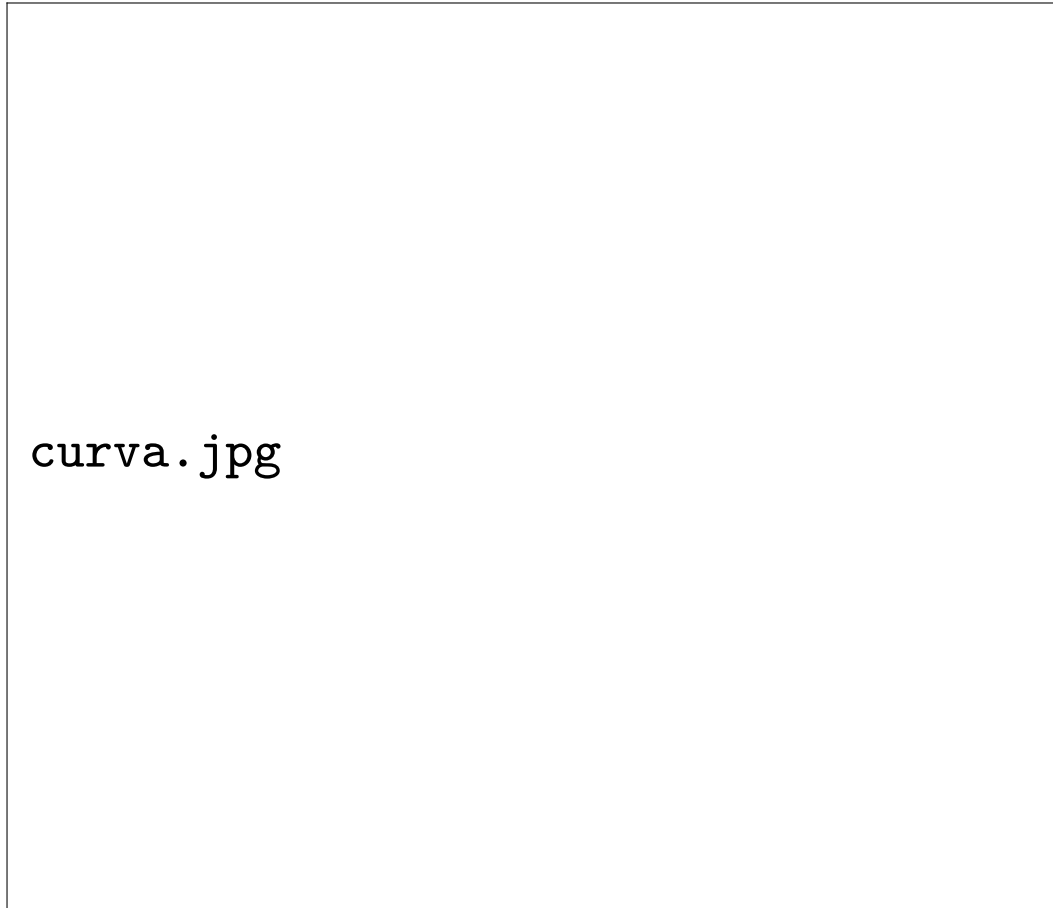
**Aldatzen deneko abiadura funtzioaren balioaren bidez kalkula daiteke**

La velocidad con la que cambia el valor de la función  $x$  es función del propio valor de  $x$

## Oinarrizko adibideak:

- El posicionamiento de un satélite;
- La temperatura en un recinto;
- El valor de un activo financiero;
- El nivel de contaminación ambiente.





curva.jpg

$x = x(t)$  funtzioaren grafika

Beste adibide batzu:

- Gravitation (Newton's law),
- Quantum mechanics (The Schrödinger equation),
- Electromagnetism (Maxwell's equations),
- Relativity (Einstein's equations),
- The motion of gases and fluids (The Navier - Stokes' equations).

Planeten higidura,

ordenagailuak,

argi elektrikoa,

GPS (Global Positioning System),

eguraldia,

klima,...

.....

eta horrela eten gabe.....

¿Por qué la ecuación diferencial  $x'(t) = f(x(t))$  tiene que ver con estos fenómenos de la Naturaleza y la Tecnología?

¿Qué aporta este punto de vista matemático?

La motivación y justificación es fruto de desarrollos en **Mecánica** (Clásica, del Continuo, Cuántica...)

La utilidad está confirmada por la **coincidencia de las predicciones matemáticas del modelo y los datos empíricos y experimentales.**

Matematikaren zehaztasuna beronen bidez azterturiko arazo fisikoetan lortzen den erantzun doietan du baieztapena.

Zer nolako erantzuna ematen digu ekuazio diferentzialen bidezko analisiak?

$$x'(t) = ax(t)$$

La velocidad de crecimiento/decrecimiento de  $x(t)$  es proporcional al valor de  $x$ , con constante de proporcionalidad  $a$ .

$$x(t) = e^{at}$$

Cuando  $a > 0$ ,  $x(t)$  **crece exponencialmente**, su límite cuando  $t \rightarrow \infty$  es  $\infty$ .

Cuando  $a < 0$ ,  $x(t)$  **decrece exponencialmente**, su límite es 0.

Cuando  $a = 0$ ,  $x(t)$  **es constante**.

¿Es esta respuesta relevante?

Zein da unibertsoaren limitea? Eten gabe hedatzen infiniturantz goaz edo beste big-bang bat izatea ezin da baztertu?

Zein da luraren berotzearen azken joera? Noizbait etengo da? Zenbat gradu gehituko dira?

Zein da gizakiaren bizi-itxaropenaren bilakaeraren limitea? Nahi beste luzatzeko gai izango gara?

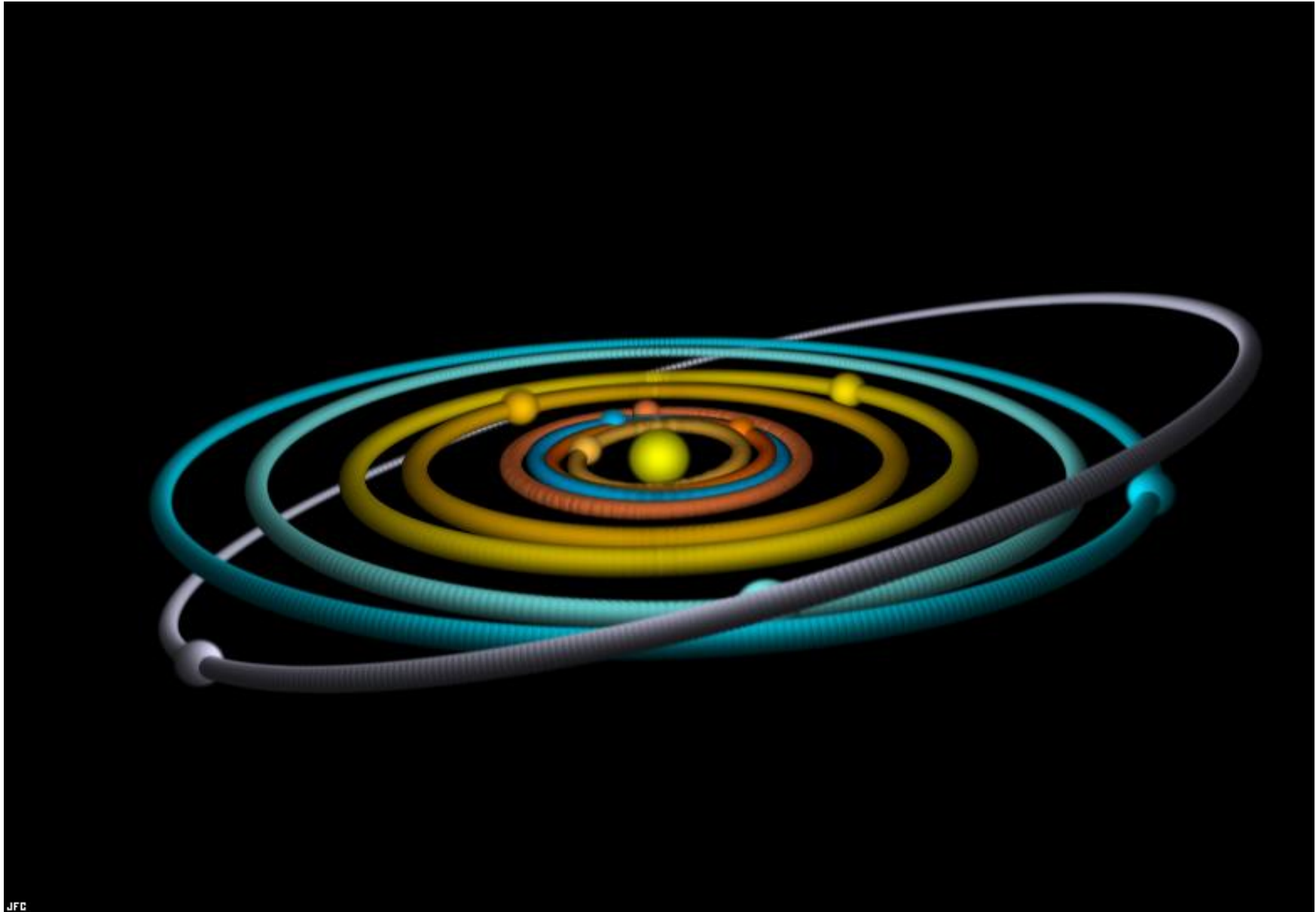
Zeintzu dira informatikaren limiteak? Gizakiaren garuna ordenagailu baten bidez errepikatzeko gai izango gara?

Dena den, erantzun matematiko honek zer ekartzen digu?

Gaur egun ordenagailuen bidez egin daitezkeen kalkulu eta simulazioen bidez arazo hauen irudi oso zehatzak lortu ahal ditugu.

De todos modos, ¿Qué aporta el método matemático en todo esto?

A través de las simulaciones de ordenador que las Matemáticas permiten realizar de estos complejos fenómenos, podemos obtener imágenes y resultados muy fiables sobre los mismos.





¿Podemos responder a estas complejas preguntas de la Naturaleza, la Ciencia y la Tecnología de un modo científico?

¿O lo hacemos simplemente en base a nuestras creencias y opiniones?

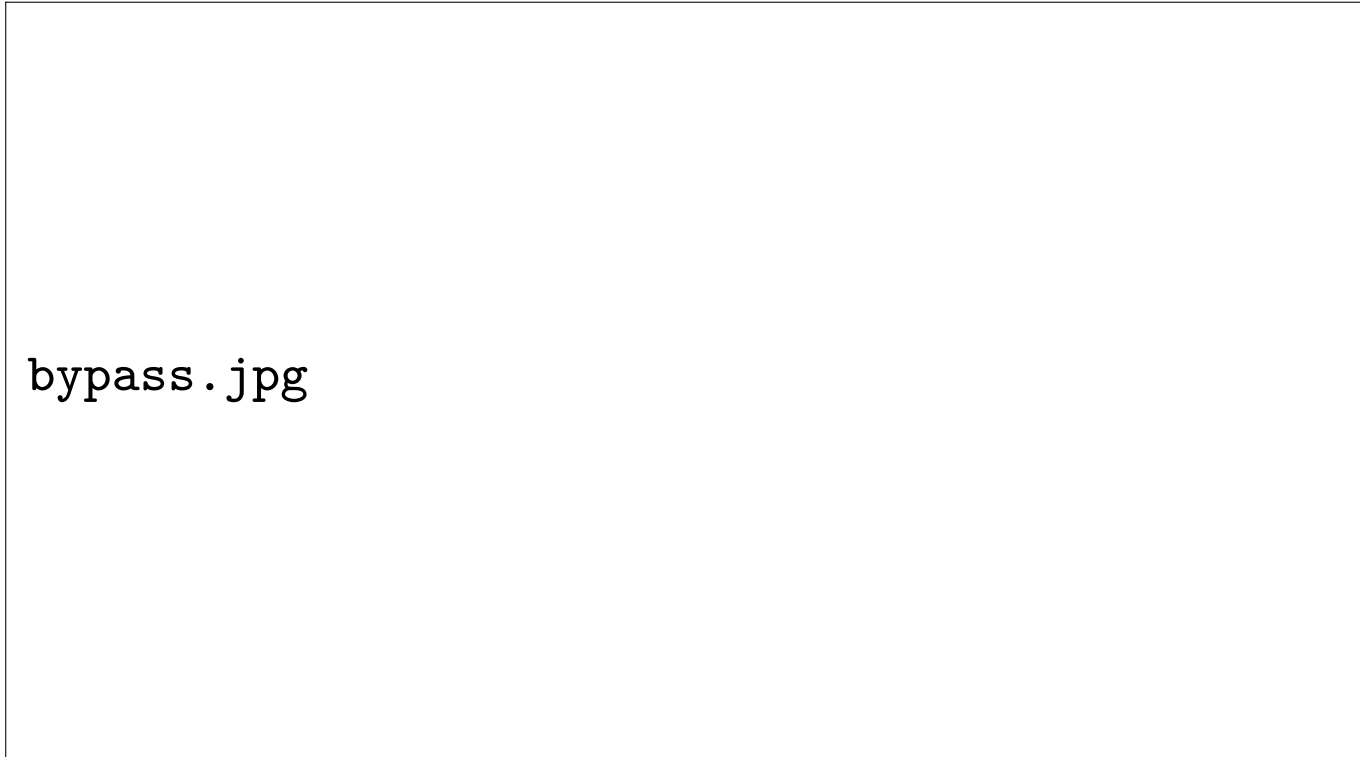
¿Pueden las Matemáticas ayudar?

Si,

MODELIZACIÓN → ANÁLISIS → SIMULACIÓN NUMÉRICA.

MEKANIKA → MATEMATIKA → KONPUTAZIOA ETA INFOR-  
MATIKA.

## UNA APLICACIÓN BIOMÉDICA DE ACTUALIDAD



By-pass, desviación, saihesbidea.

¿Cómo podemos calcular la forma óptima del conducto añadido?  
¿Cuál su anchura ideal? ¿Qué grado de elasticidad conviene para el material empleado?

Erantzuna: Navier-Stokes-en ekuazioen bidez: Beraiek deskribatzen baidute fluido baten dinamika kanal edo ubide baten zehar.

$$u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = \nabla p.$$

$\nu$  fluidoaren likatasun edo biskositatea,  $u = u(x, t)$  partikula bakoitzaren abiadura,  $p$  presioa.

UNA DE LAS GRANDES VIRTUDES DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS Y, EN PARTICULAR, DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES, ES QUE **LIGERAS VARIANTES DEL MISMO MODELO PUEDEN SERVIR PARA DESCRIBIR FENOMÉENOS VARIADOS:**

- Tráfico congestionado en ciudad;
- Irrigación;
- Canalizaciones de suministro de gas;
- Redes de comunicaciones,...

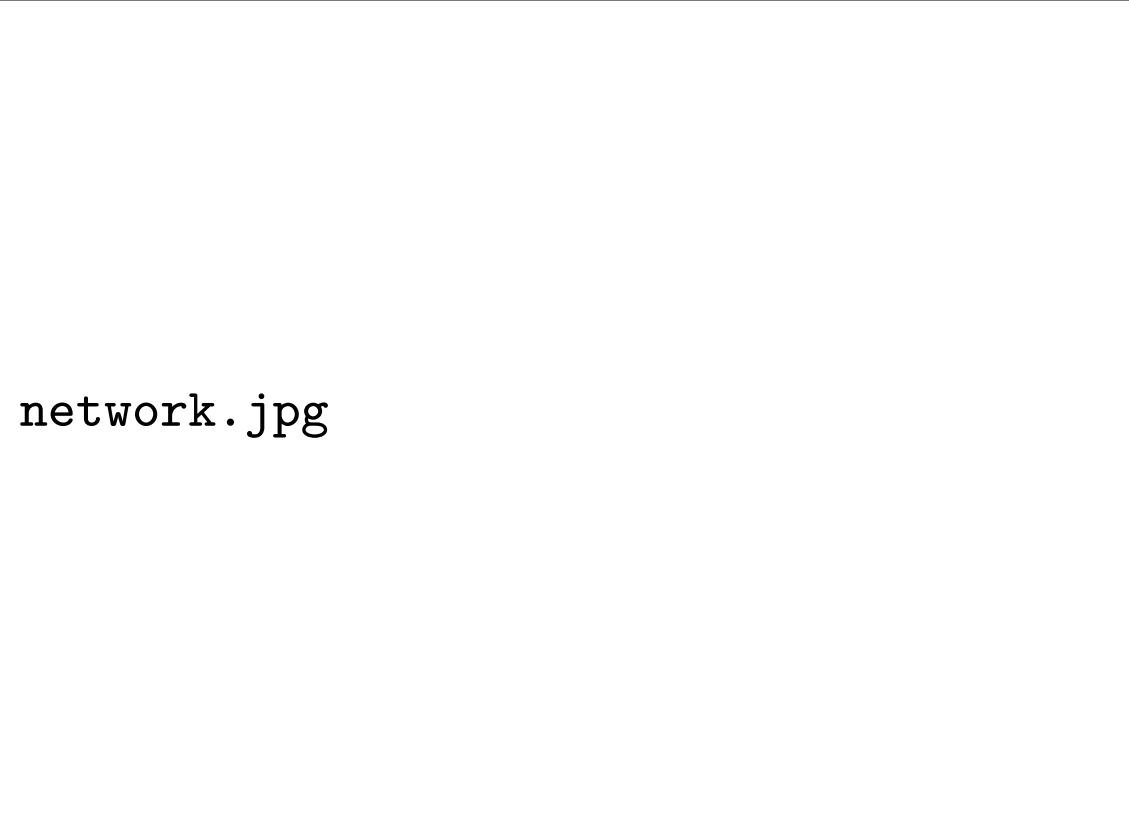
aparato-circulatorio.jpg

Gizakiaren zirkulazio-aparatua

Tresna matematiko sendoak sortzearen abantaila zera da: Behin hasierako lana egin ezkerro, horrek, lan berri gutzigaz, aldaketa txikiekin, hainbat egoera desberdinetan aplikatzeko gai izatea.

MÉTODO MATEMÁTICO:

ROBUSTO + SISTEMÁTICO + FIABLE + PRECISO + CUANTITATIVO + EXTRAPOLABLE.



network.jpg

**Grafoen sailkapena.** Propietate topologiko desberdinak dituzte eta informazioa (edo odolo, edo gasa,...) ez da modu berean hedatzen

hawking-070.jpg



hawking-07.jpg

Matematikaren malgutasun eta harikortasuna....

La ductilidad y flexibilidad del método Matemático....

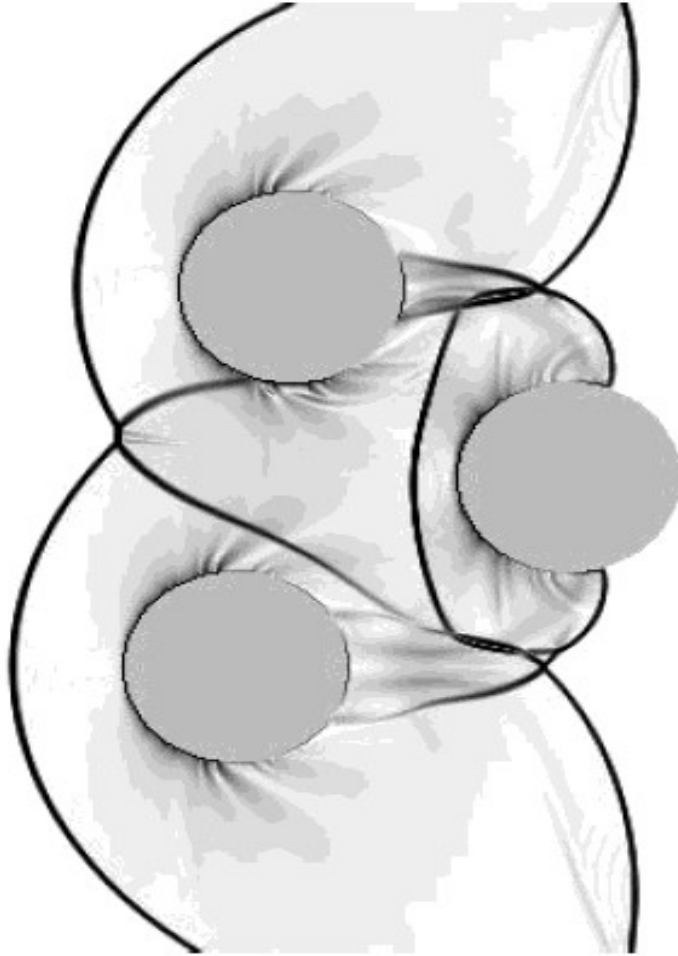
$$\rho_t + (\rho v)_x = 0,$$

$$(\rho v)_t + (\rho v^2 + P)_x = 0,$$

$$E_t + (v(E + P))_x = 0,$$

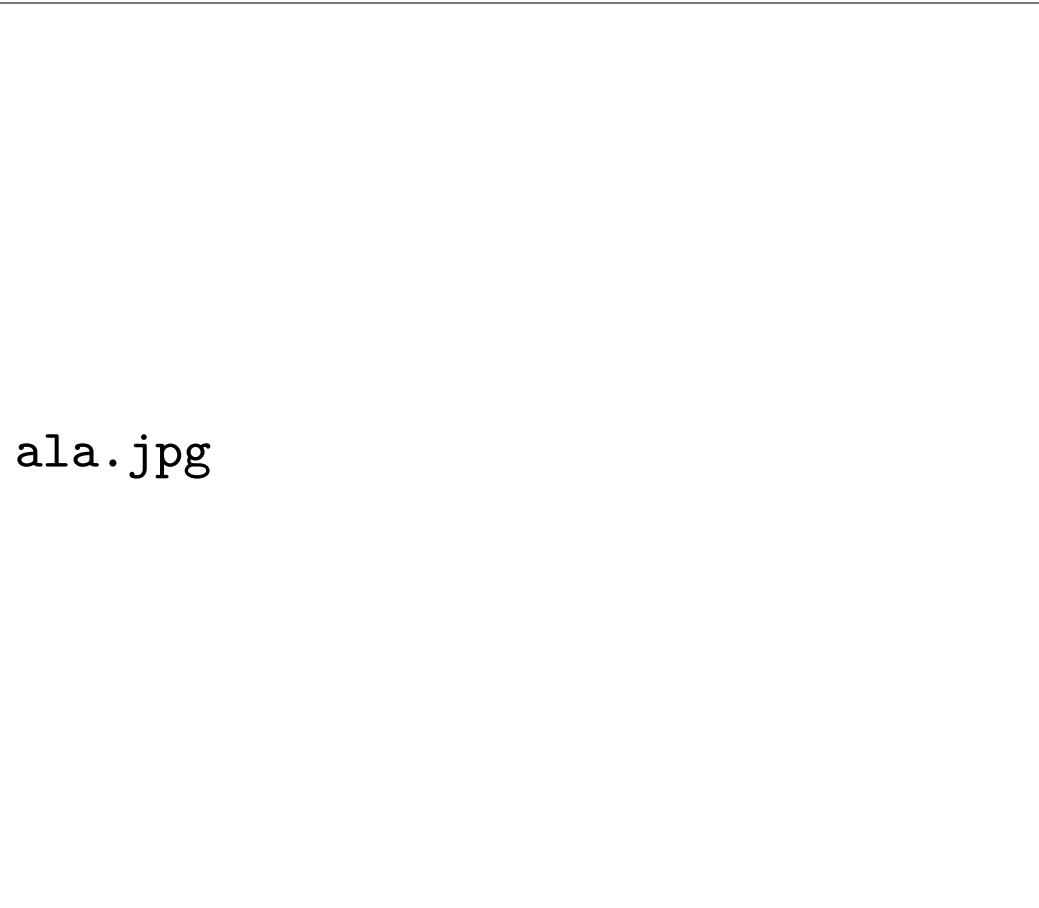
$$P = P(\rho),$$

**Euler-en ekuzioak.** Sistema hipérbolico de leyes de conservación para la dinámica de gases.  $\rho$  = densidad,  $v$  = velocidad,  $P$  = presión,  $E$  =energía.

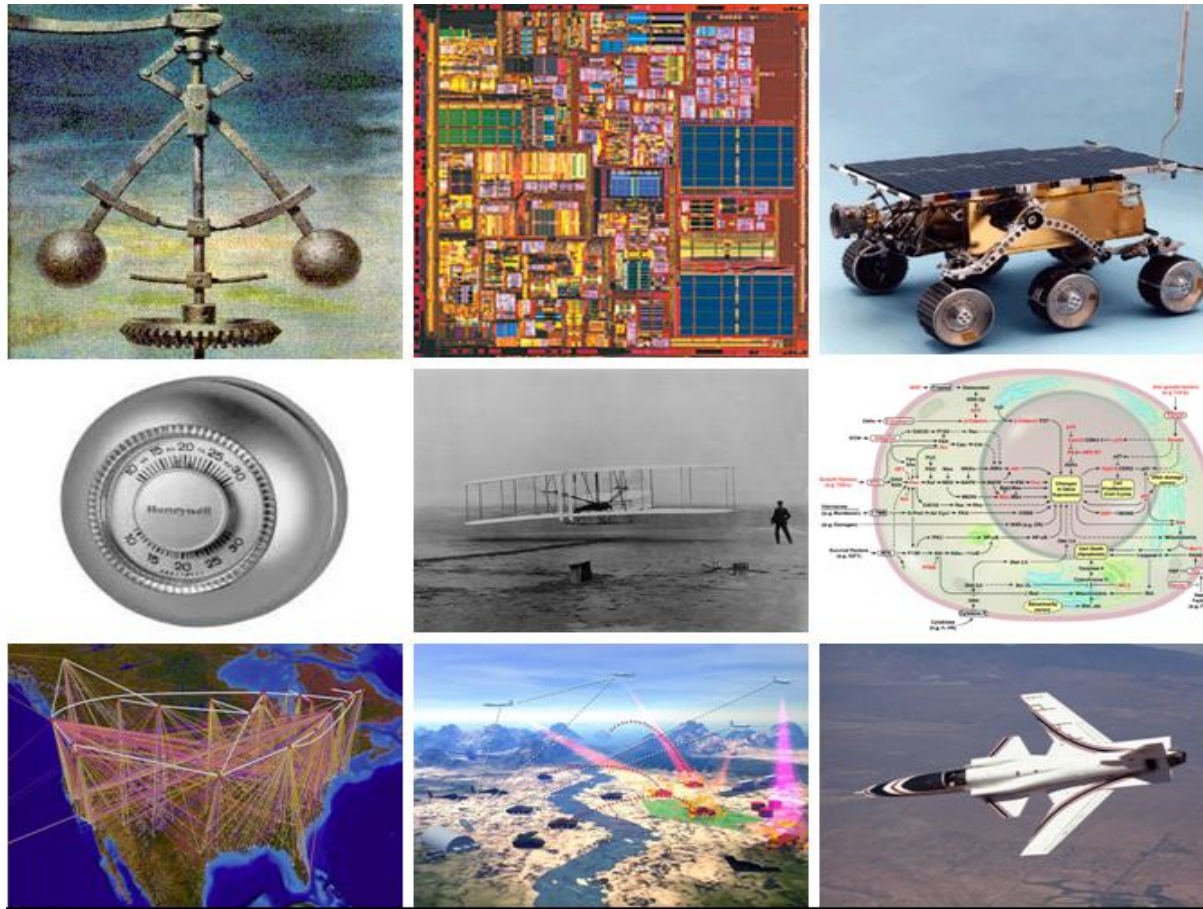


Flow of gas past three cylinders.

gas-explosion.jpg



*Hegazki baten hegaldaren inguruko aire-fluxua.*



*Control in an information rich World, SIAM, R. Murray Ed., 2003.*

HORREN ERRAZA DA?

¿ES TAN FACIL?

ZERTARAKO BEHAR DUGU BERAZ HORRENBESTE MATEMATIKA. NOLA ERABILTZEN DIRA IRUDU POLIT HAUEK LORTZEKO?

Las ecuaciones diferenciales no admiten soluciones explícitas como en el caso más sencillo  $x'(t) = ax(t)$  en el que obteníamos la solución exponencial.



La teoría matemática permite asegurar que:

- El modelo matemático construido mediante ecuaciones diferenciales refleja adecuadamente la realidad;
- Dicho modelo tiene una solución y sólo una.

Zertarako balio du ekuazio korapilotsu batek ebazpen bat duela jakiteak, ebazpen honen formula ezin badut jakin?

¿De qué sirve saber que una ecuación complicada tiene una solución si no sabemos escribir su fórmula?

alpinismo.jpg

Bide onean goazela

jakiteko.... Para saber que vamos por buen camino....

Han asmoa, han zankoa!

XX. mendearen bigarren erditik hasita, ordegaileen bilakaerari esker eta Matematikaren Analisi Numerikoaren arlo berriaren sorrera dela eta, gaur egun, nahiz eta ekuazio hauen ebazpenak idazten jakin ez, beraien hurbilketa oso zehatzak lortu ahal ditugu eta beraien itxura zeharo aztertu eta bistaratu.

Gracias al espectacular desarrollo de los ordenadores y del Análisis Numérico, a pesar de no ser capaces de obtener expresiones explícitas cerradas para las soluciones de estas ocasiones, somos capaces de calcularlas y visualizarlas de manera sumamente eficaz.

Un area de investigación multidisciplinar entre las Matemáticas y la Ingeniería, con importantes conexiones con las Ciencias de la Computación, la Tecnología, las Telecomunicaciones,...

Matematika eta informatika batuz zientziaren arlo edo eta paradigma berri bat sortu da: MATEMATIKA KONPUTAZIONALA.

El ordenador, gracias a las matemáticas, se ha convertido en un irreplaceable laboratorio de experimentación. LA MATEMÁTICA COMPUTACIONAL.

Honelatan ba, ordenagailua, esperimantazio-laboretegi berri baten bihurtu da.


¿Cómo contribuyen a ésto las Matemáticas?

El ordenador sólo realiza operaciones elementales: suma resta, multiplicación, división...

Todo proceso ha de ser minuciosamente descompuesto para que acabe resultando una cadena de las mismas. El ordenador aporta la monstruosa capacidad de cálculo de la que carecemos los humanos.

$$x'(t) \sim \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, h \rightarrow 0$$

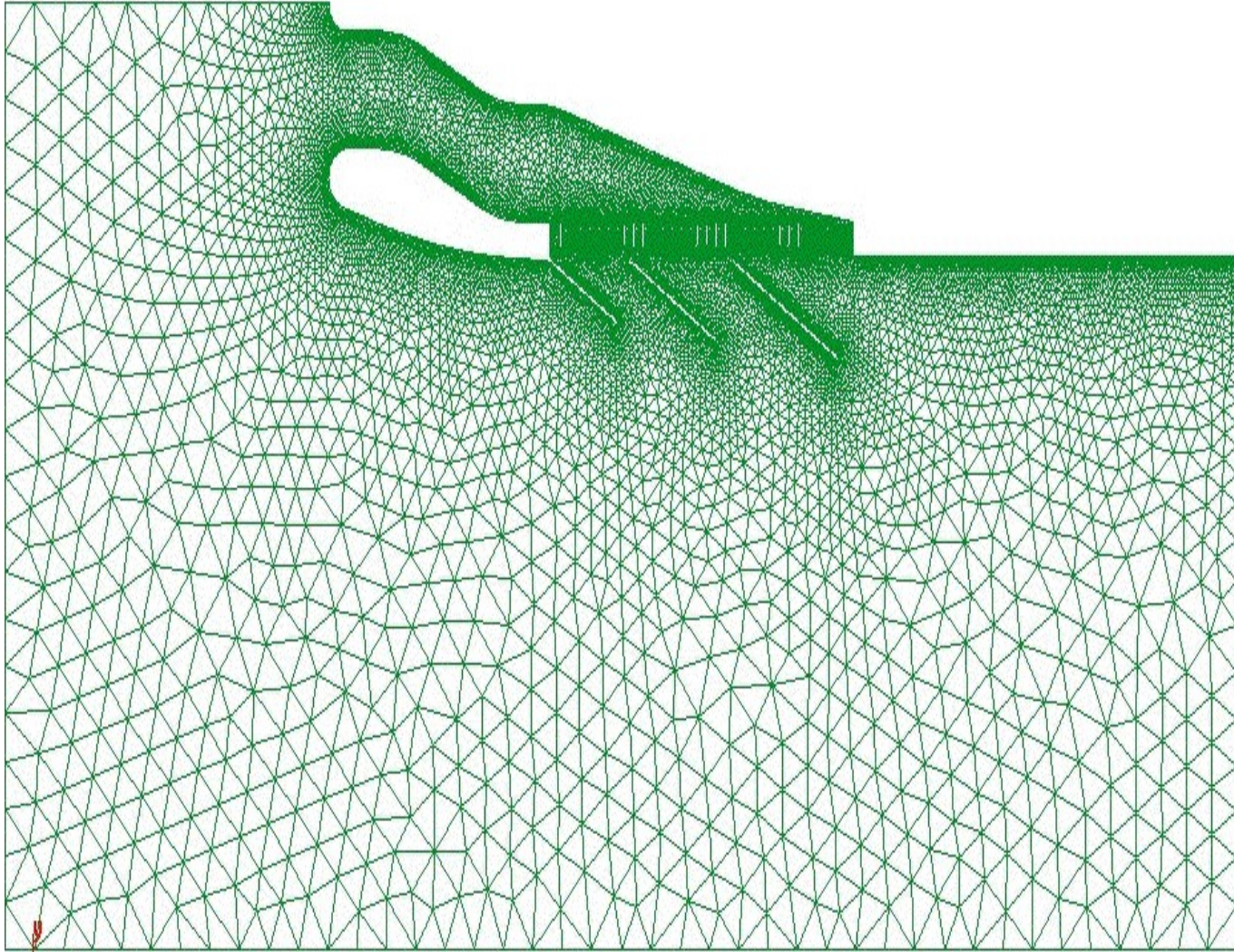
Ordenagailuak eragiketa oiharrizkoak besterik ez dity betetzen. Berak gure simulazioak aurrera ateratzeko, nahi ta ez, prozesu guztiak txikitu eta banatu beharra dugu eragiketa hauen sekuentzia bezala.



secante.jpg

Azken batean ebakitzailaren metodoa besterik ez da...

Se trata simplemente de sustituir una curva, que puede tener una gemoetría arbitrariamente compleja, en una sucesión de rectas.



Honelatan ba...

$$x'(t) = f(x(t))$$

→

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \Delta t f(x(t_k)), k = 1, 2, 3, 4, 5...$$

Euler-en metodoa

Honelatan ba, eukiazio diferentzialak ebaztea, batuteka eta beste ohi-narrizko eragiketen segida baten bihurtzen da.

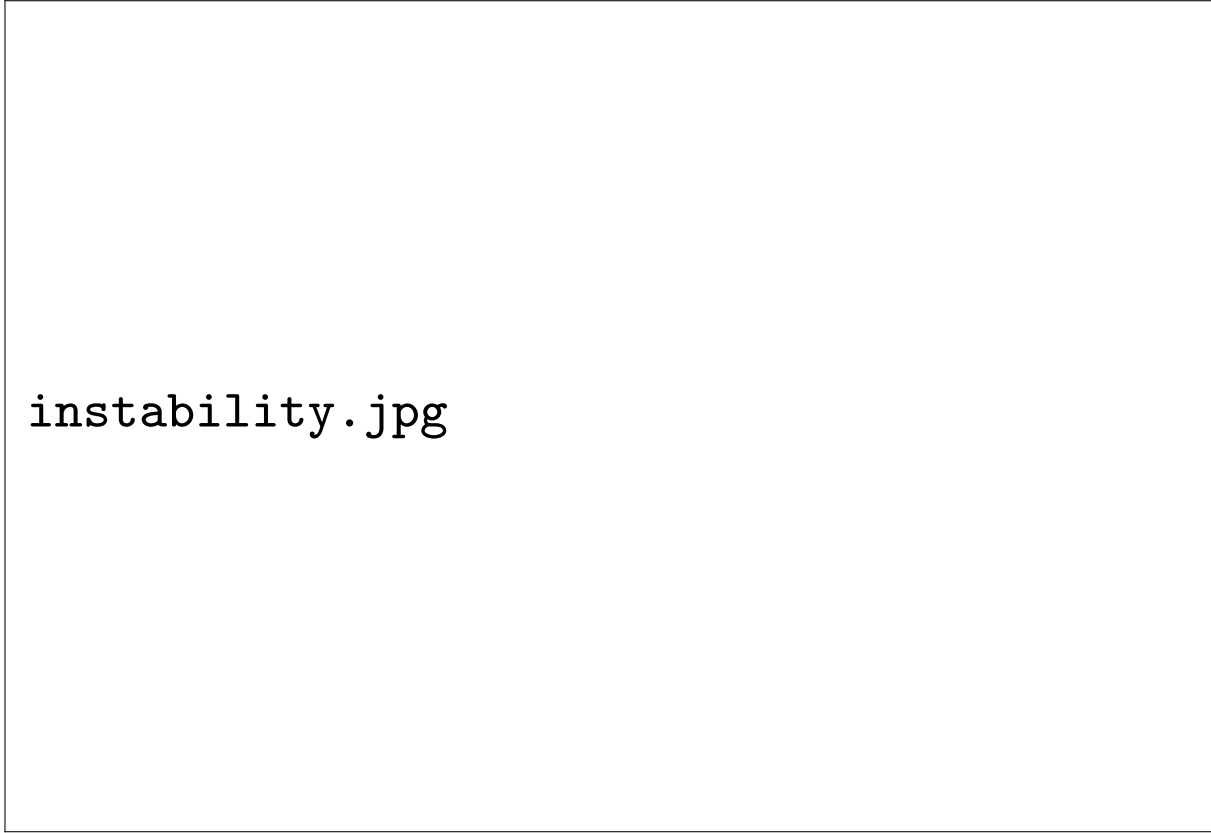


¿Podemos asegurar que cualquier discretización razonable de una ecuación diferencial dará lugar a la verdadera solución?

Teorema de P. Lax:

CONVERGENCIA = CONSISTENCIA + ESTABILIDAD.

La discretización puede generar **inestabilidades** que den lugar a resultados erróneos:



instability.jpg

Ezegonkortasuna

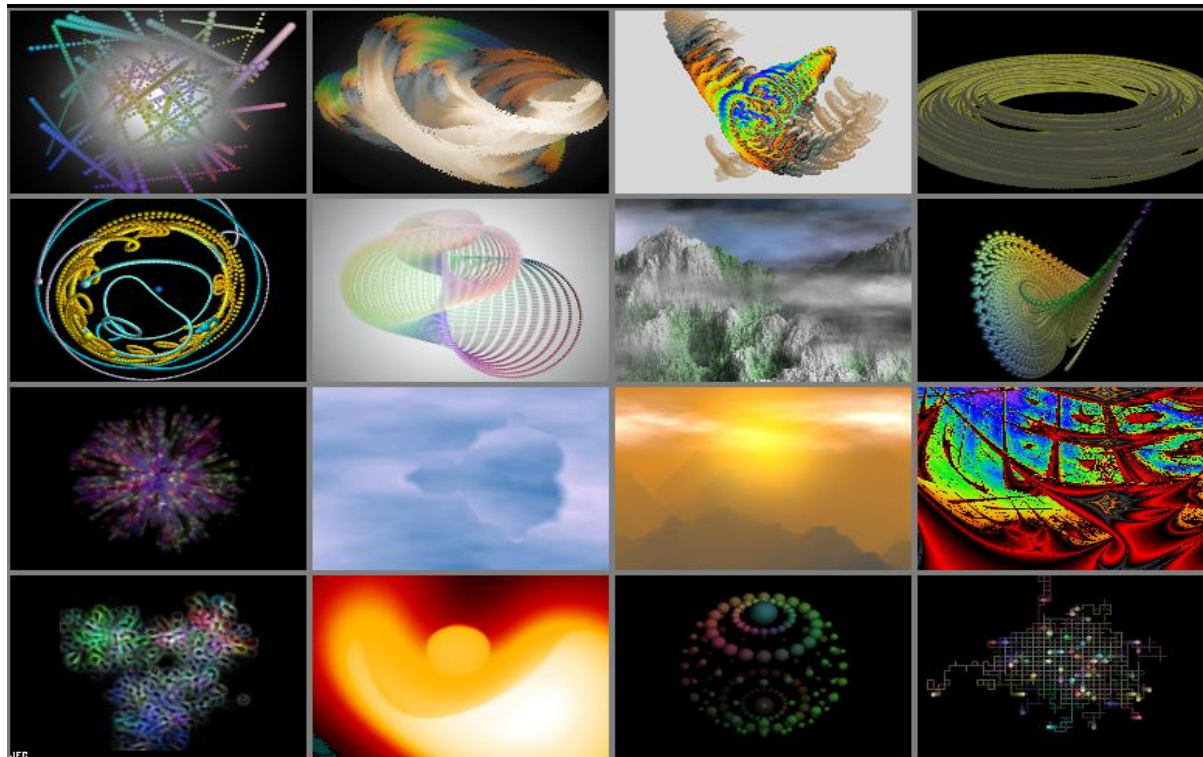


Solución espúria  
producida por un esquema numérico inestable.

Sasiko ebazpena, gezurrezkoa.

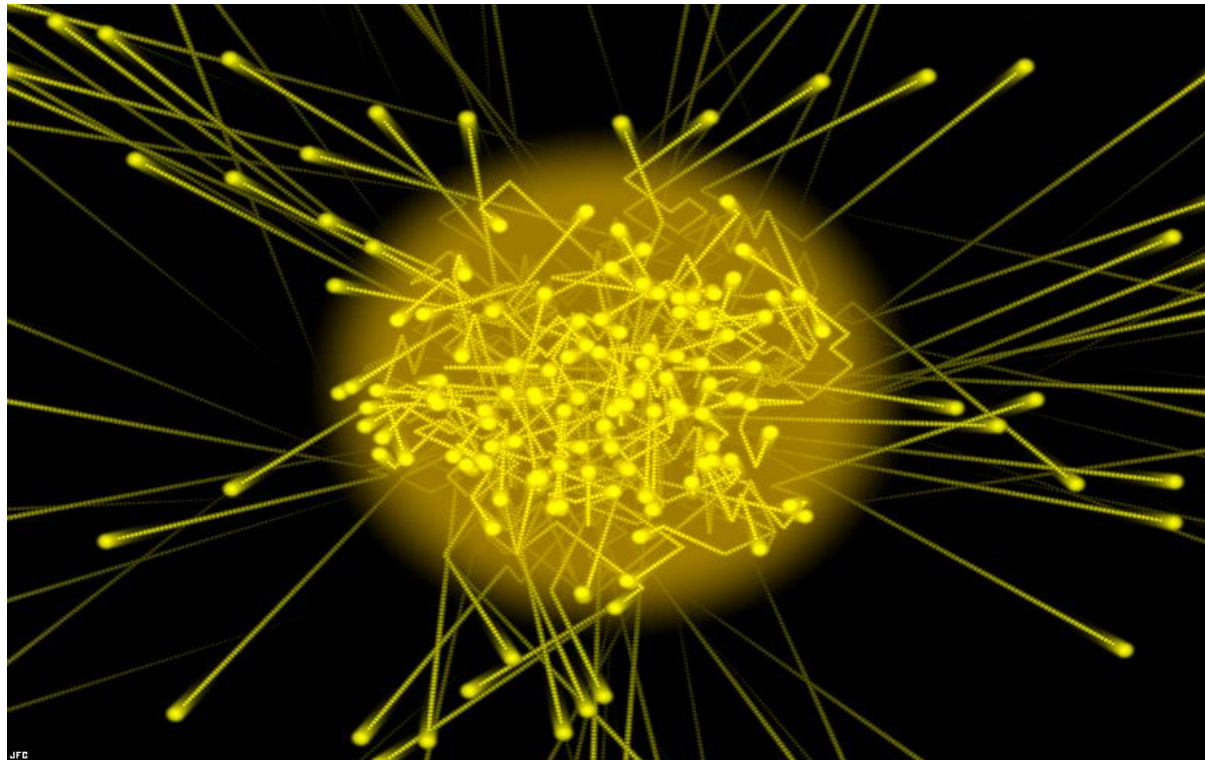
# NORA GOAZ? ¿HACIA DÓNDE VAMOS?

Increasing complexity!



Zalantzaren munduan. Ordenik gabeko ingurunea antolatzen...

Random world... Order within disorder...



Katrina eta Rita urakanak zoriaren umeak dira....

Los huracanes Katrina y Rita son hijos del azar

Kerry A. Emanuel, MIT

El País, Irailak 25

Zertarako eredu eta metodo matematikoen bidez horren gau zailak lantzen saiatu?

Behin eta eredu matematikoa eraiki, metodoa prest dugu:

Eredua+Analisia+Simulazioa

¿Para qué empeñarse en una descripción matemática, que podría tacharse de simplista, de los fenómenos complejos?

Porque el método matemático se aplica posteriormente de forma automática: Modelo+Matemáticas+ Simulación Numérico

¿Y dónde queda el rigor en este mundo científico cada vez más vertiginoso?

Zehastasun eta doitasun matematikoa oraindik beharrezkoak dira?  
Beti? Batzutan? Nola jakin noiz den horren beharrezkoa?

¿Es necesaria la compleja, profunda y sólida edificación del pensamiento matemático?

Matematikaren egitura astun osoa behar ote da?



Un pequeño error en las hipótesis de partida o en el desarrollo matemático puede conducir a resultados catastróficos.

**GEZURREZKO TEOREMA FALSO:** Zenbaki arrunt handiena hauxe da:  $N = 1$  es el número natural más grande.

Froga=Demostración: Biz  $N^*$  zenbaki arrunt handiena.

Noski

$$1 \leq N^*.$$

Bestalde

$$(N^*)^2 \leq N^*,$$

$N^*$  handiena baita eta  $(N^*)^2$  zenbaki arrunta delako ( $1^2 = 1, 2^2 = 4 > 2, 3^2 = 9 > 3, \dots$ )

Orduan,  $1 \leq N^*$  baita. Beraz  $1 \leq N^* \leq 1$ . Hortaz,  $N^* = 1$ .

Non dago hutsa? ¿Dónde está el error?

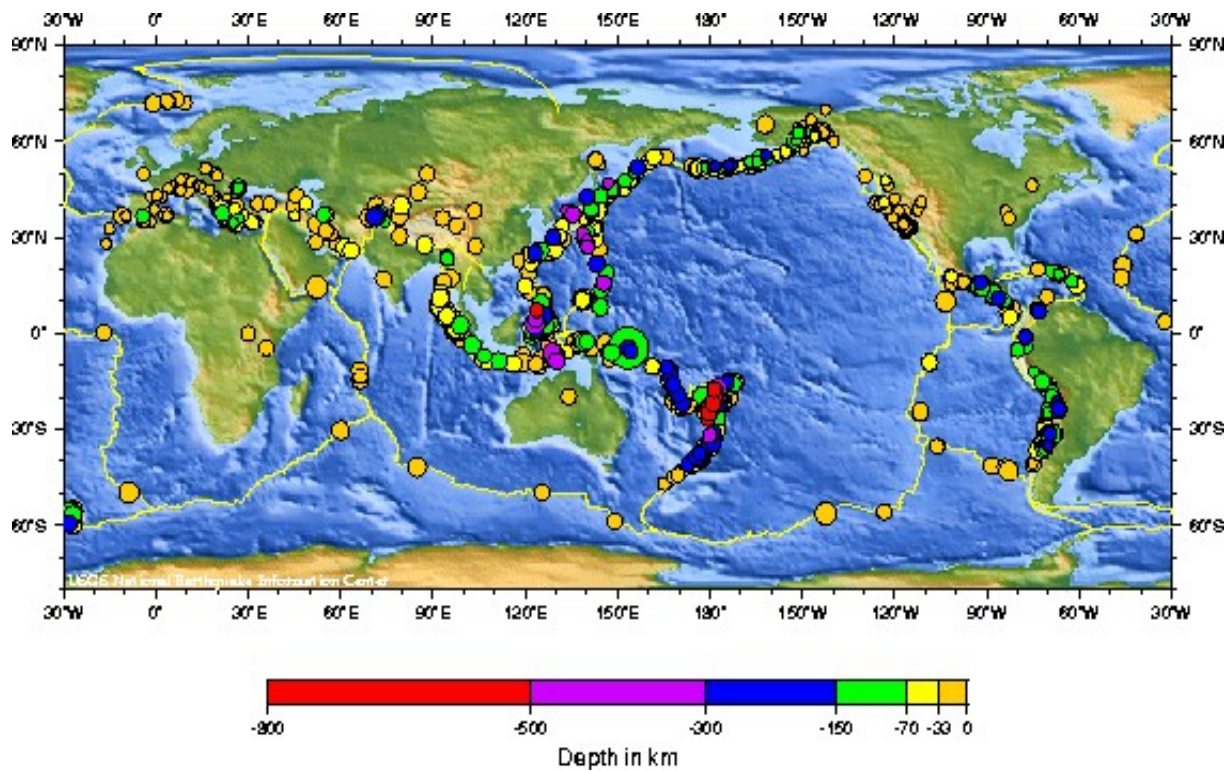
Batzutan erruak ez dira horren inuzente izaten.

A veces los errores son más dramáticos.



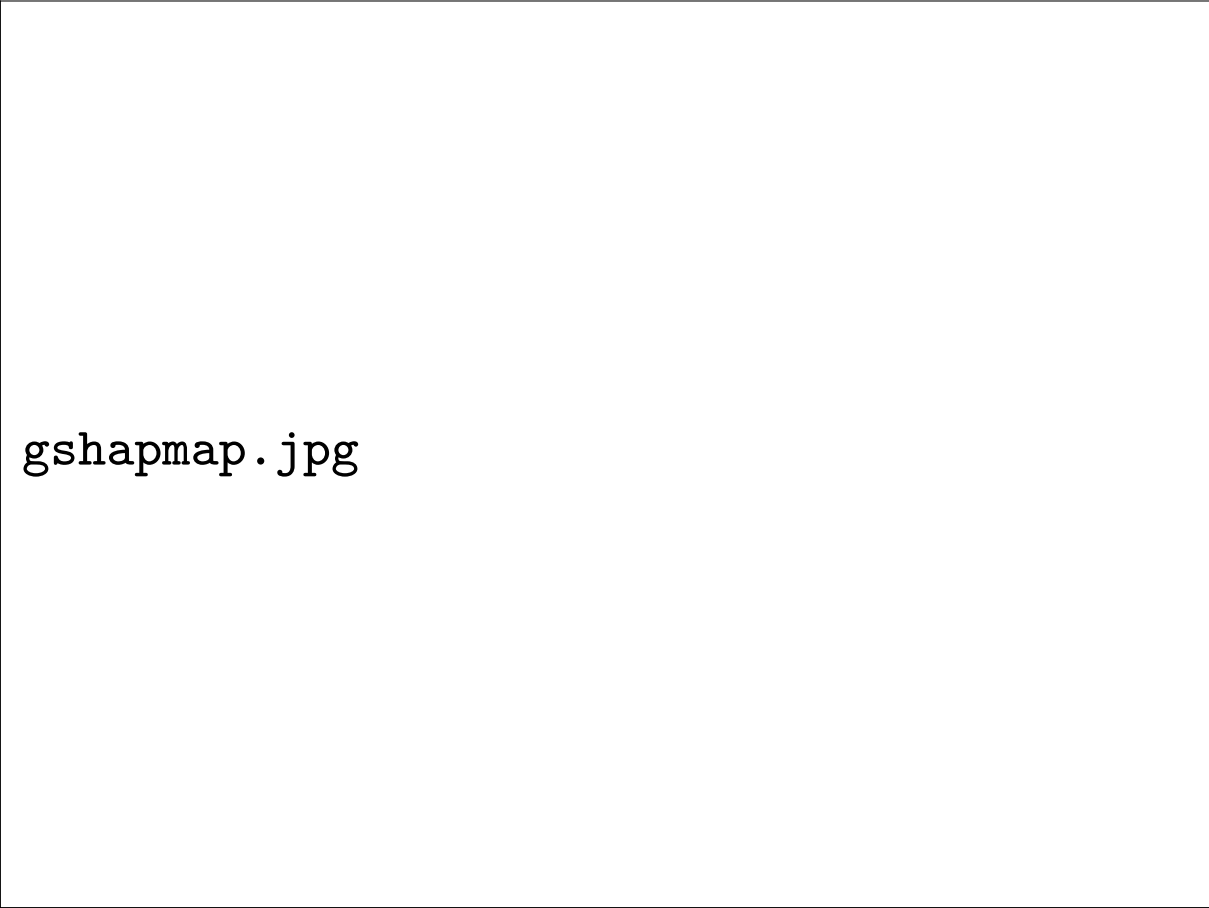
Takoma, Estatu Batuak, 1940

<http://astro.if.ufrgs.br/evol/takoma.htm>



<http://gldss7.cr.usgs.gov/neis/qed/qed.html>

Puntos de actividad sísmica del último mes.



gshapmap.jpg

<http://earthquake.usgs.gov/hazards/probability.html>

Zer behar da arazo hauek zehazki aztertzeko?

¿Qué necesitamos para analizar estas cuestiones de manera rigurosa y eficaz?

- \* **Modelización:** Uhin sismikoendako eredu sendo bat: elastikotasun sistema.
- \* **Modelos de explosión:** Estanda-uhinen hedapenaren ulerpen ona.
- \* **Geología:** Lurraren egituraren informazioa zehatsa (uhin eremu oso heterogeonetan),
- \* **Estadística:** Estatistika eta probabilitate teoria piloa;
- \* **Análisis Numérico:** Análisi numerikoa eta simulazioa,....

Hortaz, Matematika zientzia bizia, oiharrizkoa bai, baina etorkizonarekin nahi ta ez lotua,...

En definitiva, la Matemática es, además de una Ciencia Básica, un imprescindible elemento del desarrollo futuro,...



Eta bakoitzak? ¿Y cada uno?

Zenbat eta gehiago landu, suerte gehiago dudala ematen du.

Cuanto más trabajo y practico, más suerte parezco tener.

Gary Player, golf jokalaria.

GAUZAK ZEHARO ALDATUKO DIRA ET GAZTEEK ALDAKETA  
HONETAN EKITEKO AUKERA DUTE.

LAS COSAS CAMBIARÁN. UNA EXCELENTE OCASIÓN PARA  
LOS JÓVENES DE SER LOS PROTAGONISTAS DE ESE CAM-  
BIO.

## Predictions for Scientific Computing Fifty Year From Now

Lloyd N. Trefethen, Oxford Univ.

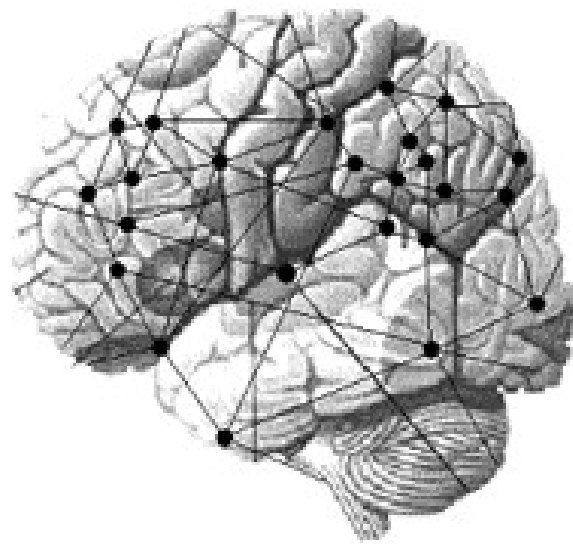
- 1.- We may not be here.
- 2.- We'll talk to the computers more often than we type to them, and they will respond with pictures more often than with numbers.
- 3.- Numerical computing will be adaptive, iterative, exploratory, intelligent, and the computing power will be beyond your wildest dreams.
- 4.- Determinism in numerical computing will be gone.

5, 6, 7, 8, 9.

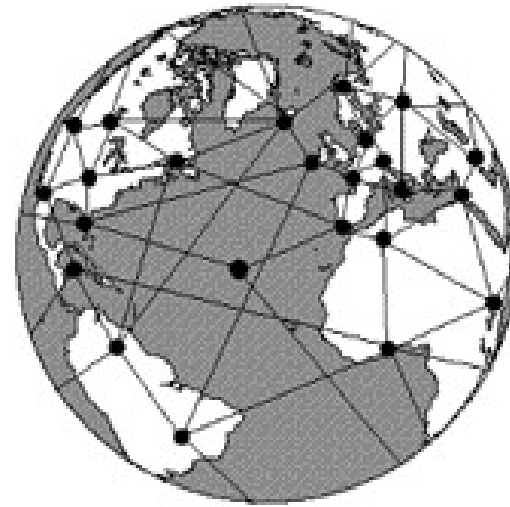
10.- The problem of massively parallel computing will have been blown open by ideas related to the human brain.

11.- Our methods of programming will be blown open by ideas related to genomes and natural selection.

brain-net.jpg



Human Brain



Global Network



ESKERRIKASKO!

Gracias.